1) CONDICIONES PARA QUE UNA FUNCIÓN SEA UN PRODUCTO INTERNO

Una función dada es un producto interno si satisface los siguientes cuatro axiomas:

1.- *Simetría* o *conmutatividad*:

$$\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right)=\overline{\left(\bar{v}\,\middle|\,\bar{u}\right)}$$

2.- *Aditividad* o *distributividad*:

$$\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}+\bar{w}\right)=\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right)+\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{w}\right)$$

3.- *Homogeneidad*:

$$\left(\alpha\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right)=\alpha\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right)$$

4.- *Positividad*:

$$\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{u}\right)>0 \quad \forall\,\bar{u}\neq 0$$

ó bien:

$$\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{u}\right)=0 \quad \textit{si y sólo si } \bar{u}=0$$

donde $\overline{\left(\bar{v}\,\middle|\,\bar{u}\right)}$ representa el *conjugado del número complejo* $\left(\bar{v}\,\middle|\,\bar{u}\right)$.

NOTA: Puede haber más de un producto interno (P.I.) en un espacio vectorial (E.V.). Por ejemplo, para los vectores $\bar{x}=(x_1,x_2)$ y $\bar{y}=(y_1,y_2)$ que $\in R^2$, el producto interno puede ser:

$$\left(\bar{x}\,\middle|\,\bar{y}\right)=x_1y_1+x_2y_2 \;\Rightarrow\; \underline{\text{producto interno usual}}$$

$$\left(\bar{x}\,\middle|\,\bar{y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2 \;\Rightarrow$$

producto interno que <u>*no es el usual*</u> (así como éste, en un espacio vectorial pueden haber más *productos internos* que no son los usuales).

Otros ejemplos de productos internos usuales son:

a) El producto escalar en C^n, o producto interno usual en C^n definido por:

$$\left(\bar{z}\,\middle|\,\bar{w}\right)=z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2}+\dots+z_n\overline{w_n}$$

donde:

$$\bar{z}=(z_1,z_2,\dots,z_n)$$
$$\bar{w}=(w_1,w_2,\dots,w_n)$$
$\overline{w_i}$ = Conjugado de w_i.

b) En el espacio V de las funciones reales de variable real, continuas en el intervalo (a, b), la función $(\cdot|\cdot)$ definida por:

$$\left(f\,\middle|\,g\right)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \;\Rightarrow\; \text{es un producto interno real}$$

c) En el espacio V de las matrices de $m\times n$ con elementos en R, el siguiente es un producto interno real:

$$\left(A\,\middle|\,B\right)=tr\left(A^TB\right) \;\rightarrow\; \text{para números reales}$$

d) En el espacio V de las matrices de $m\times n$ con elementos en C, la siguiente función es un producto interno real:

$$\left(A\,\middle|\,B\right)=tr\left(A^*B\right) \;\rightarrow\; \text{para números complejos, y}$$

donde A^* representa la conjugada transpuesta de A.

2) DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

La *Desigualdad de Cauchy-Schwarz* se define mediante la siguiente expresión:

$$\left|\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right)\right|^2\leq\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{u}\right)\left(\bar{v}\,\middle|\,\bar{v}\right)$$

ó bien (en términos de la *norma*):

$$\left|\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)\right| \le \|\bar{u}\|\|\bar{v}\|$$

donde $\|\bar{u}\|$ y $\|\bar{v}\|$ son la <u>*norma*</u> de $\bar{u}$ y $\bar{v}$, respectivamente; y $\left|\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)\right|$ es el <u>*módulo*</u> del producto interno $\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)$.

El *módulo* de un escalar se define como:

- ***Para números complejos***:

–De la forma: $\alpha = a + bi \rightarrow |\,\alpha\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$

–De la forma: $\alpha = a - bi \rightarrow |\,\alpha\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- ***Para números reales***:

–De la forma: $\alpha = a \quad \rightarrow |\,\alpha\,| = \sqrt{a^2} = a$

La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* permite determinar si dos vectores son linealmente dependientes o independientes:

- Si $\left|\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)\right|^2 = \left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right)\left(\bar{v}\,|\,\bar{v}\right)$
  $\downarrow$
  los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes

- Si $\left|\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)\right|^2 < \left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right)\left(\bar{v}\,|\,\bar{v}\right)$
  $\downarrow$
  los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente independientes

3) NORMA DE UN VECTOR

La *norma* de un vector se define mediante la expresión:

$$\|\bar{u}\| = \left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right)^{1/2} = \sqrt{\left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right)}$$

ó bien:

$$\|\bar{u}\|^2 = \left(\bar{u}\,|\,\bar{u}\right)$$

Un <u>*vector es unitario*</u> cuando su norma es igual a uno: $\|\bar{u}\| = 1$. Además, cualquier vector $\bar{u}$ puede convertirse en vector unitario utilizando la siguiente expresión $\bar{e} = \dfrac{1}{\|\bar{u}\|}\bar{u}$.

Las <u>*propiedades*</u> fundamentales que satisface toda *norma* son:

1. $\|\bar{v}\| > 0$
2. $\|\bar{v}\| = 0$ si y sólo si $\bar{v} = 0$
3. $\|\alpha\,\bar{v}\| = |\alpha|\,\|\bar{v}\|$
4. $\|\bar{u} + \bar{v}\| \le \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\| \quad \Rightarrow$ conocida como ***desigualdad del triángulo***

NOTA: Puesto que un E.V. puede tener más de un P.I., un vector puede tener distintas normas dependiendo del producto interno especificado en cada caso.

4) ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

El ángulo θ entre dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ se puede obtener mediante las siguientes expresiones:

- Cuando $\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)$ es un <u>*número real*</u>:

$$Cos\theta = \frac{\left(\bar{u}\,|\,\bar{v}\right)}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}$$

NOTA: Cuando *Cos* θ = *0*
$\downarrow$
θ = *90°*.

- cuando $\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right)$ es un <u>*número complejo*</u>:

$$Cos\theta \cong \frac{R\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right)}{\left\|\bar{u}\right\|\left\|\bar{v}\right\|}$$

NOTA: Cuando $Cos\ \theta \cong 0$
↓
$\theta \cong 90°$.

NOTA: Al igual que la norma de un vector, se pueden tener distintos ángulos entre dos vectores, dependiendo del producto interno especificado en cada caso.

PROPIEDADES IMPORTANTES:
Si "θ" es el ángulo entre los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, entonces:

- "θ" es agudo si $\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right) > 0$.
- "θ" es obtuso si $\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right) < 0$.
- "θ" es recto ($\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$) si $\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right) = 0$.

5) DISTANCIA ENTRE DOS VECTORES

La distancia entre dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ se determina con la expresión:

$$d\left(\bar{u},\bar{v}\right) = \left\|\bar{u}-\bar{v}\right\| = \left\|\bar{v}-\bar{u}\right\|$$

Las propiedades que satisface la *distancia* son:

1. $d\left(\bar{u},\bar{v}\right) \geq 0$
2. $d\left(\bar{u},\bar{v}\right) = 0$ si y sólo si $\bar{u} = \bar{v}$
3. $d\left(\bar{u},\bar{v}\right) = d\left(\bar{v},\bar{u}\right)$
4. $d\left(\bar{u},\bar{w}\right) \leq d\left(\bar{u},\bar{v}\right) + d\left(\bar{v},\bar{w}\right)$

NOTA: La distancia entre dos vectores también puede variar, dependiendo del producto interno especificado en cada caso.

6) ORTOGONALIDAD

Dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ortogonales cuando su producto interno es igual a cero:

$$\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right) = 0$$

Es decir, el ángulo entre ellos es:

$$Cos\theta = \frac{\left(\bar{u}\,\middle|\,\bar{v}\right)}{\left\|\bar{u}\right\|\left\|\bar{v}\right\|} = \frac{0}{\left\|\bar{u}\right\|\left\|\bar{v}\right\|} = 0$$

$$\theta = Cos^{-1}(0) = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$$

7) TEOREMA DE PITÁGORAS

Si dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son *ortogonales*, entonces se debe cumplir que:

$$\left\|\bar{u}+\bar{v}\right\|^2 = \left\|\bar{u}\right\|^2 + \left\|\bar{v}\right\|^2$$

8) CONJUNTO ORTOGONAL

Un conjunto es ortogonal cuando cada uno de sus vectores es ortogonal a los demás vectores del conjunto. Es decir, S es un *conjunto ortogonal* cuando:

$$\left(\bar{v_i}\,\middle|\,\bar{v_j}\right) = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

Pero si además $\left\|\bar{v_i}\right\| = 1 \quad \forall\, i$, el <u>*conjunto es ortonormal*</u>.

TEOREMA:
Un conjunto ortogonal de vectores no nulos, es linealmente independiente.

9) PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

Permite convertir un conjunto de vectores que no es ortogonal, en uno que sí es ortogonal:

a) Sea $A=\{\overline{v_1},\overline{v_2}\}$ $\Rightarrow$ conjunto que no es ortogonal

Sea $B=\{\overline{w_1},\overline{w_2}\}$ $\Rightarrow$ conjunto que se convierte en ortogonal

Los vectores que forman el nuevo conjunto ortogonal $B=\{\overline{w_1},\overline{w_2}\}$, se obtienen con el *proceso de Gram-Schmidt* a partir de las siguientes expresiones:

$$\overline{w_1}=\overline{v_1}$$

$$\overline{w_2}=\overline{v_2}-\frac{\left(\overline{v_2}\,|\,\overline{w_1}\right)}{\left(\overline{w_1}\,|\,\overline{w_1}\right)}\overline{w_1}$$

b) Si el conjunto original tiene tres vectores: $A=\{\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}\}$, los vectores que constituyen el nuevo conjunto ortogonal $B=\{\overline{w_1},\overline{w_2},\overline{w_3}\}$, se obtienen con las expresiones:

$$\overline{w_1}=\overline{v_1}$$

$$\overline{w_2}=\overline{v_2}-\frac{\left(\overline{v_2}\,|\,\overline{w_1}\right)}{\left(\overline{w_1}\,|\,\overline{w_1}\right)}\overline{w_1}$$

$$\overline{w_3}=\overline{v_3}-\frac{\left(\overline{v_3}\,|\,\overline{w_1}\right)}{\left(\overline{w_1}\,|\,\overline{w_1}\right)}\overline{w_1}-\frac{\left(\overline{v_3}\,|\,\overline{w_2}\right)}{\left(\overline{w_2}\,|\,\overline{w_2}\right)}\overline{w_2}$$

c) Si el conjunto original tiene cuatro vectores: $A=\{\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3},\overline{v_4}\}$, los vectores que constituyen el nuevo conjunto ortogonal $B=\{\overline{w_1},\overline{w_2},\overline{w_3},\overline{w_4}\}$, se obtienen con las expresiones:

$$\overline{w_1}=\overline{v_1}$$

$$\overline{w_2}=\overline{v_2}-\frac{\left(\overline{v_2}\,|\,\overline{w_1}\right)}{\left(\overline{w_1}\,|\,\overline{w_1}\right)}\overline{w_1}$$

$$\overline{w_3}=\overline{v_3}-\frac{\left(\overline{v_3}\,|\,\overline{w_1}\right)}{\left(\overline{w_1}\,|\,\overline{w_1}\right)}\overline{w_1}-\frac{\left(\overline{v_3}\,|\,\overline{w_2}\right)}{\left(\overline{w_2}\,|\,\overline{w_2}\right)}\overline{w_2}$$

$$\overline{w_4}=\overline{v_4}-\frac{\left(\overline{v_4}\,|\,\overline{w_1}\right)}{\left(\overline{w_1}\,|\,\overline{w_1}\right)}\overline{w_1}-\frac{\left(\overline{v_4}\,|\,\overline{w_2}\right)}{\left(\overline{w_2}\,|\,\overline{w_2}\right)}\overline{w_2}-\frac{\left(\overline{v_4}\,|\,\overline{w_3}\right)}{\left(\overline{w_3}\,|\,\overline{w_3}\right)}\overline{w_3}$$

Y así sucesivamente, se pueden obtener los nuevos vectores $\overline{w_i}$ de un conjunto ortogonal con las siguientes expresiones generales (*proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt*):

$$\overline{w_1}=\overline{v_1}$$

y:

$$\overline{w_i}=\overline{v_i}-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\left(\overline{v_i}\,|\,\overline{w_k}\right)}{\left(\overline{w_k}\,|\,\overline{w_k}\right)}\overline{w_k}$$

En cualquiera de los casos anteriores, el nuevo conjunto ortogonal $B=\{\overline{w_1},\overline{w_2},...,\overline{w_n}\}$ constituye una *base ortogonal*, donde sus elementos son todos aquellos $\overline{w_i}\neq\overline{0}$.

Además, es posible obtener una *base ortonormal* a partir de cualquier base ortogonal $B_{OG}=\{\overline{w_1},\overline{w_2},...,\overline{w_n}\}$, solamente convirtiendo los vectores $\overline{w_i}$ en *vectores unitarios*, con las expresiones:

$$\overline{e_1}=\frac{1}{\left\|\overline{w_1}\right\|}\overline{w_1}$$

$$\overline{e_2}=\frac{1}{\left\|\overline{w_2}\right\|}\overline{w_2}$$

$$\overline{e_n} = \frac{1}{\left\|\overline{w_n}\right\|}\overline{w_n}$$

Siendo $B_{ON} = \left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_n}\right\}$ la *base ortonormal*.

10) VECTOR DE COORDENADAS

Con la definición de producto interno es posible obtener un vector de coordenadas $\left(\overline{v}\right)_{B_{OG}}$ del vector $\overline{v}$ en la *base ortogonal* B_{OG}. Es decir, si se escribe al vector $\overline{v}$ como combinación lineal de los vectores de la base ortogonal $B_{OG} = \left\{\overline{w_1}, \overline{w_2}, ..., \overline{w_n}\right\}$:

$$\overline{v} = \beta_1\overline{w_1} + \beta_2\overline{w_2} + ... + \beta_n\overline{w_n}$$

Se sabe que los escalares $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ son las coordenadas del vector de coordenadas $\left(\overline{v}\right)_{B_{OG}}$ buscado; las cuales se pueden obtener con las expresiones:

$$\beta_1 = \frac{\left(\overline{v}\,\middle|\,\overline{w_1}\right)}{\left(\overline{w_1}\,\middle|\,\overline{w_1}\right)}$$

$$\beta_2 = \frac{\left(\overline{v}\,\middle|\,\overline{w_2}\right)}{\left(\overline{w_2}\,\middle|\,\overline{w_2}\right)}$$

$$\beta_n = \frac{\left(\overline{v}\,\middle|\,\overline{w_n}\right)}{\left(\overline{w_n}\,\middle|\,\overline{w_n}\right)}$$

Con lo cual, el vector de coordenadas buscado se escribe:

$$\left(\overline{v}\right)_{B_{OG}} = \left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad ... \quad \beta_n\right]^T = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ .\\ .\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

De igual manera, a partir de una *base ortonormal* se puede obtener el vector de coordenadas $\left(\overline{v}\right)_{B_{ON}}$. Es decir, para la base ortonormal $B_{ON} = \left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_3}\right\}$, escribiendo la combinación lineal:

$$\overline{v} = \gamma_1\overline{e_1} + \gamma_2\overline{e_2} + ... + \gamma_n\overline{e_n}$$

y de la definición de producto interno, se obtienen los escalares $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ (que son las coordenadas del vector $\overline{v}$ anterior) como sigue:

$$\gamma_1 = \left(\overline{v}\,\middle|\,\overline{e_1}\right)$$

$$\gamma_2 = \left(\overline{v}\,\middle|\,\overline{e_2}\right)$$

$$\gamma_n = \left(\overline{v}\,\middle|\,\overline{e_n}\right)$$

así, el vector de coordenadas buscado es:

$$\left(\overline{v}\right)_{B_{ON}} = \left[\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad ... \quad \gamma_n\right]^T = \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ .\\ .\\ \gamma_n\end{bmatrix}$$

11) COMPLEMENTO ORTOGONAL

Sea V un espacio con producto interno, y sea W un subconjunto de V. Se dice que un vector $\overline{v} \in V$ es ortogonal al conjunto W cuando $\left(\overline{v}\,\middle|\,\overline{u}\right) = 0 \quad \forall\, \overline{u} \in W$. Además, el conjunto de todos los vectores de V, ortogonales a W se denota con el símbolo $W^{\perp}$, es decir:

$$W^{\perp} = \left\{\overline{v} \in V \,\middle|\, \left(\overline{v}\,\middle|\,\overline{u}\right) = 0 \;\; \forall\, \overline{u} \in W\right\}$$

Cuando *W es un subespacio de V*, el conjunto $W^{\perp}$ se conoce como el *complemento ortogonal de W*.

El complemento ortogonal, tiene la propiedad de que cualquier vector $\overline{v} \in V$ puede expresarse en forma única como:

$$\overline{v} = \overline{w_o} + \overline{w'}$$

donde $\overline{w_o} \in W$ y $\overline{w'} \in W^{\perp}$.

12) PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO VECTORIAL

Sea *V* un espacio con producto interno, *W* un *subespacio* de *V* de dimensión finita y $B_{ON} = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ una *base ortonormal* de *W*. Si se tiene $\overline{v} \in V$, entonces el vector:

$$\overline{w_o} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{v} \,\middle|\, \overline{e_i} \right) \overline{e_i}$$

se llama la proyección de $\overline{v}$ sobre *W*.

TEOREMA DE PROYECCIÓN:

Sea *V* un espacio con producto interno, y sea *W* un *subespacio de V*. Para cada vector $\overline{v} \in V$ existe uno y sólo un vector $\overline{w_o} \in W$ tal que:

$$\left\| \overline{v} - \overline{w_o} \right\| < \left\| \overline{v} - \overline{w} \right\| \quad \forall\, \overline{w} \in W, \quad \overline{w} \neq \overline{w_o}$$

dicho vector es la proyección de $\overline{v}$ sobre *W*.

13) MÍNIMOS CUADRADOS

El concepto de mínimos cuadrados se emplea en sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$ que son *inconsistentes*, es decir, que no tienen solución. Cuando se necesita una solución y no existe alguna, lo que se puede hacer es encontrar un "*x*" que haga a "*Ax*" tan cercana a "*b*" como sea posible. Cuanto más pequeña sea la distancia entre "*b*" y "*Ax*" mejor será la aproximación. Entonces, el problema general de mínimos cuadrados consiste en encontrar un "*x*" que haga a $\|b - Ax\|$ tan pequeña como sea posible.

DEFINICIÓN: Si *A* es una matriz de orden $m \times n$ y "*b*" está en R^m, una solución por mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ es un $\hat{x}$ en R^n tal que:

$$\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\| \qquad \forall\, x \in R^n$$

TEOREMA DE MÍNIMOS CUADRADOS:

Sea *A* una matriz de orden $m \times n$ y sea "*b*" en R^m. Entonces $Ax = b$ siempre tiene al menos una solución de mínimos cuadrados $\hat{x}$. Además:

1. $\hat{x}$ es una solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$, si y sólo si $\hat{x}$ es una solución de las ecuaciones normales:

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

2. "*A*" tiene columnas linealmente independientes si y sólo si $A^T A$ es invertible. En este caso, la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es única y está dada por:

$$\hat{x} = \left(A^T A \right)^{-1} A^T b$$